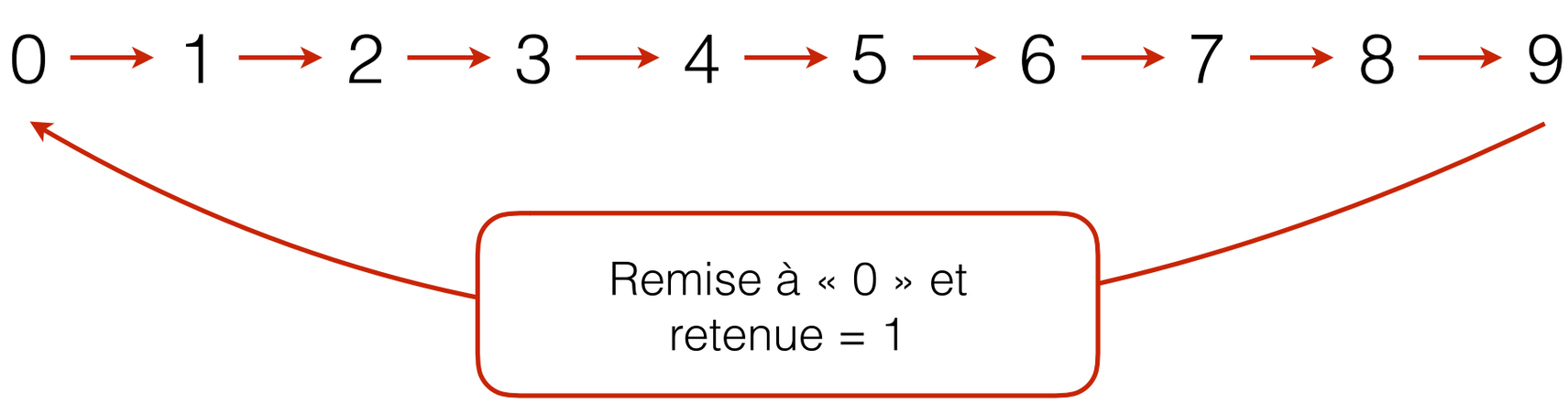
Représentation des entiers

- Chaque nombre doit avoir une représentation différente
  - 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14…
  - I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV…
- Pour se simplifier la vie, on utilise une représentation avec laquelle il est facile de compter
  - CMXCIX + XVI = ?

Compter en décimal

- Ordre des symboles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- Que faire quand on arrive au bout?
  - on recommence au début en ajoutant une retenue de 1 au prochain symbole



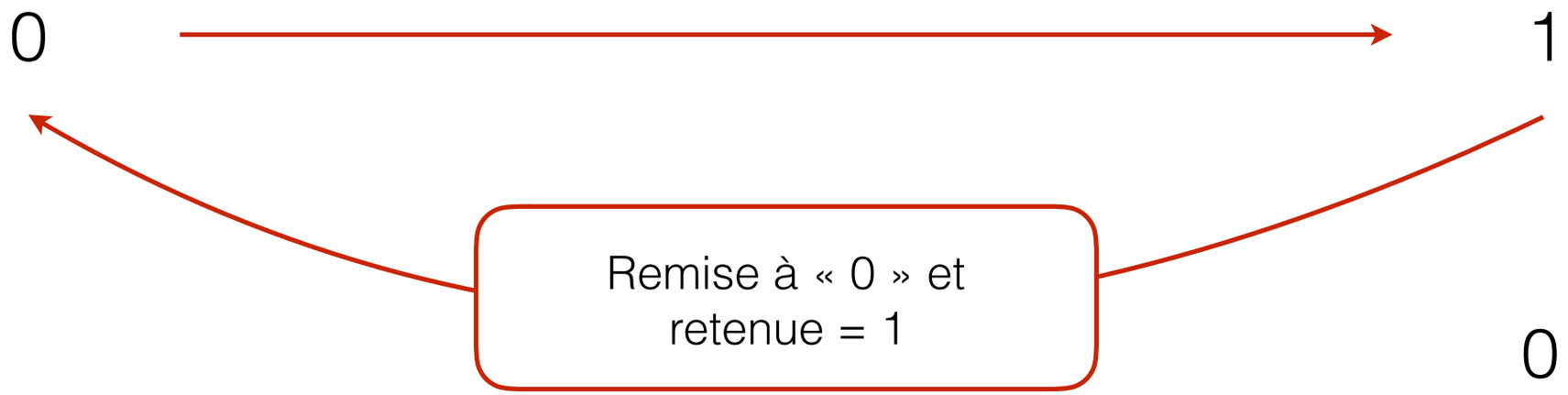
Représentation décimale	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0
	1	4	2	3

Valeur décimale

$$1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 1423$$

Compter en binaire

- Et si on utilisait *2* symboles au lieu de 10?

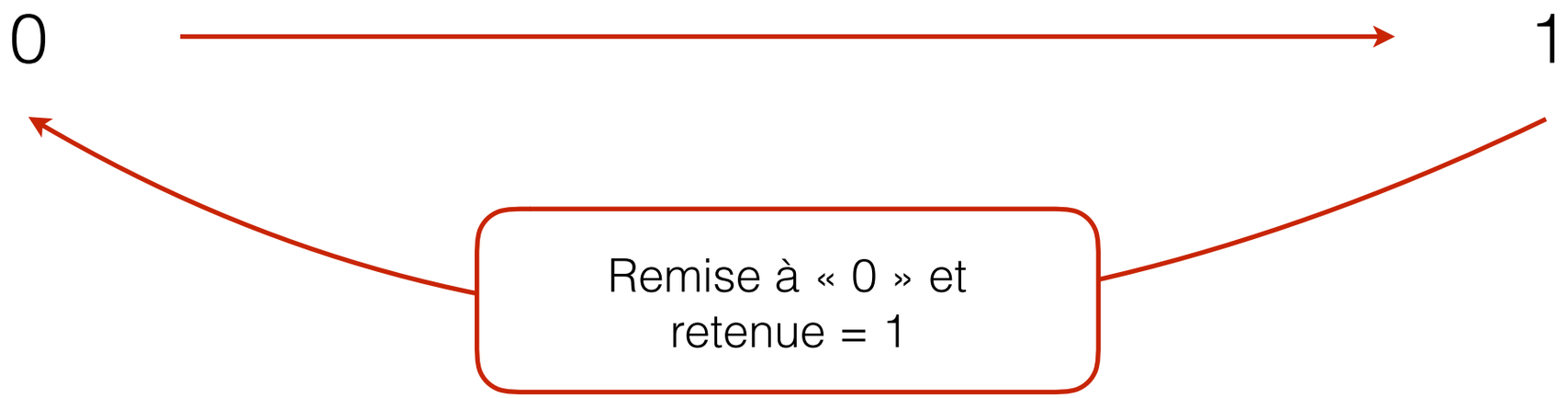


0
1
10
11
100
101
110
111
1000
…

- Comptons!

Compter en binaire

- Et si on utilisait *2* symboles au lieu de 10?



- En binaire, un symbole est nommé « bit ».
  - Un bit a 2 valeurs possibles: « 0 » ou «1».

Représentation binaire	Position 3	Position 2	Position 1	Position 0
	1	0	1	1

Valeur décimale : $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$

Récapitulation

- Pour représenter un nombre entier, nous sommes familiers avec la notation décimale, mais plusieurs options sont possibles.

- Il faut définir:

Base	Symboles	
2	0 et 1	(binaire)
10	0 à 9	(décimal)

Nombres différents

- Combien de nombres différents peut-on générer avec…
  - 2 symboles en format décimal?
  - 3 symboles en format décimal?
  - 4 bits en format binaire?
  - 8 bits en format binaire?
  - 16 bits en format binaire?

Nombres différents

- Combien de nombres différents peut-on générer avec…
  - 2 symboles en format décimal? ➛ 0 à 99 = 10^2 = 100 nombres
  - 3 symboles en format décimal? ➛ 0 à 999 = 10^3 = 1000 nombres
  - 4 bits en format binaire? ➛ 0000 à 1111 = 2^4 = 16 nombres
  - 8 bits en format binaire? ➛ 00000000 à 11111111 = 2^8 = 256 nombres
  - 16 bits en format binaire? ➛ 0000… à 1111… = 2^{16} = 65536 nombres

Cette semaine

4 PHIR™

(**P**oint **H**yper **I**mportants à **R**etenir)

Image source

PHIR™ #1

- Dans un ordinateur, **tout, absolument tout**, est stocké en format binaire
  - entiers naturels (strictement positifs): $\mathbb{N}$
  - entiers relatifs (positifs et négatifs): $\mathbb{Z}$
  - réels (avec précision limitée): $\mathbb{R}$
  - chaîne de caractères: Bonjour!
  - programmes: `while (true) {printf(“Hello world!”);}`
  - images:

  - vidéos
  - twitter
  - facebook
- Bref, **tout**!

image

PHIR™ #2

- Dans un ordinateur, on utilise un nombre **fini** de bits pour représenter de l'information.

- Ce nombre doit toujours être **pré-déterminé**, donné à l'avance par quelqu'un (le prof, le programmeur, le standard, etc…)

  - Exemple (par la programmeuse)

```
int toto = 2;
```

    - Le « `int` » indique (la plupart du temps) un entier relatif sur 32 bits

- Exemple (par le prof)
  - Convertissez 9 en binaire **sur 8 bits** ➔ 00001001

- Exemple (par le standard IEEE754)
  - L'exposant est stocké avec 8 bits.

Qu'est-ce que l'IEEE754?
Réponse au prochain cours…

Nombre de bits

- En théorie, on pourrait utiliser le nombre de bits que l'on veut. En pratique, certains nombres sont plus communs:
  - 1 bit : 2 valeurs (0 et 1)
  - 4 bits: 16 valeurs (0 à 15)
  - 8 bits: 256 valeurs (0 à 255)
    - aussi appelé *octet*, ou, en anglais, *byte*
  - 16 bits: 65 536 valeurs (0 à 65 535)

Bits vs octets

8 bits = 1 octet (*byte*)

- Combien de valeurs peut-on représenter avec 1 octet?
  - 1 octet = 8 bits = 2^8 valeurs = 256
- Multiples d'octets:
  - 1 Kilo-octet (1 Ko) = 2^{10} o = 1024 o = 8 192 bits
  - 1 Mega-octet (1 Mo) = 2^{10} Ko = 2^{20} o = 8 388 608 bits
  - 1 Giga-octet (1 Go) = 2^{10} Mo = 2^{20} Ko = 2^{30} o = 8 589 934 592 bits
  - 1 Tera-octet (1 To) = 2^{10} Go = 2^{20} Mo = 2^{30} Ko = 2^{40} o = …
  - 1 Peta-octet (1 Po) = 2^{10} To = 2^{20} Go = 2^{30} Mo = 2^{40} Ko = 2^{50} o = …

« o » est l'abbréviation d'octet

Conventions d’écriture

- Comment différencier
  - 1111 (binaire),
  - et 1111 (décimal)?

dans le cours nous privilégierons le préfixe 0b

- Binaire: on utilise le préfixe « 0b » ou l’indice « b ». Ex:
  - $0b1111 = 1111_b = 15$
- Décimal: aucune notation particulière.

Représentation des entiers

Entiers non-signés

positifs (ou nuls)

0, 1, 2, …

entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Entiers signés

positifs ou négatifs

… -2, -1, 0, 1, 2, …

entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Représentation des entiers

Entiers non-signés

positifs (ou nuls)

0, 1, 2, …

entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Entiers signés

positifs ou négatifs

… -2, -1, 0, 1, 2, …

entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Conversion vers décimal

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

Conversion vers décimal

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Conversion vers décimal

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=								

Conversion vers décimal

- binaire ➙ décimal
  - 0b10010101

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	0	0	1	0	1	0	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	0	0	16	0	4	0	1

= 149

  - 0b11001011

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	64	0	0	8	0	2	1

= 203

Conversion: décimal ➔ binaire (approche 1)

- 10 = 0b?

10	2		
-10	5	2	
0	-4	2	2
	1	-2	**1**
		0	

- 10 = 0b1010

Selon moi, cette approche est plus simple, mais utilisez votre préférée!

Conversion: décimal ➙ binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 10 en binaire?
  - commencer de la gauche: 0 x 128, 0 x 64, …

Bits	0	0	0	0				

- 1 x 8. On met un “1” à la position 3. Reste 2

Bits	0	0	0	0	1			

  - 0 x 4

Bits	0	0	0	0	1	0		

  - 1 x 2. On met un “1” à la position 1. Reste 0. Terminé!

Bits	0	0	0	0	1	0	1	0

Conversion: décimal ➙ binaire (approche 2)

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1

- 147 en binaire?
  - commencer de la gauche: 1 x 128. Reste 19

Bits	1							

  - 0 x 64, 0 x 32, 1 x 16. Reste 3

Bits	1	0	0	1				

  - 0 x 8, 0 x 4, 1 x 2. Reste 1

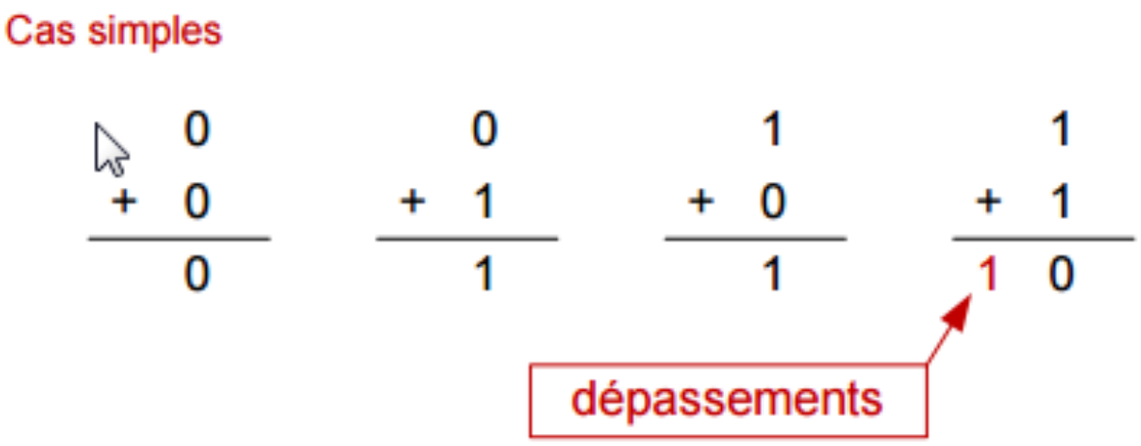
Bits	1	0	0	1	0	0	1	

  - 1 x 1. Terminé!

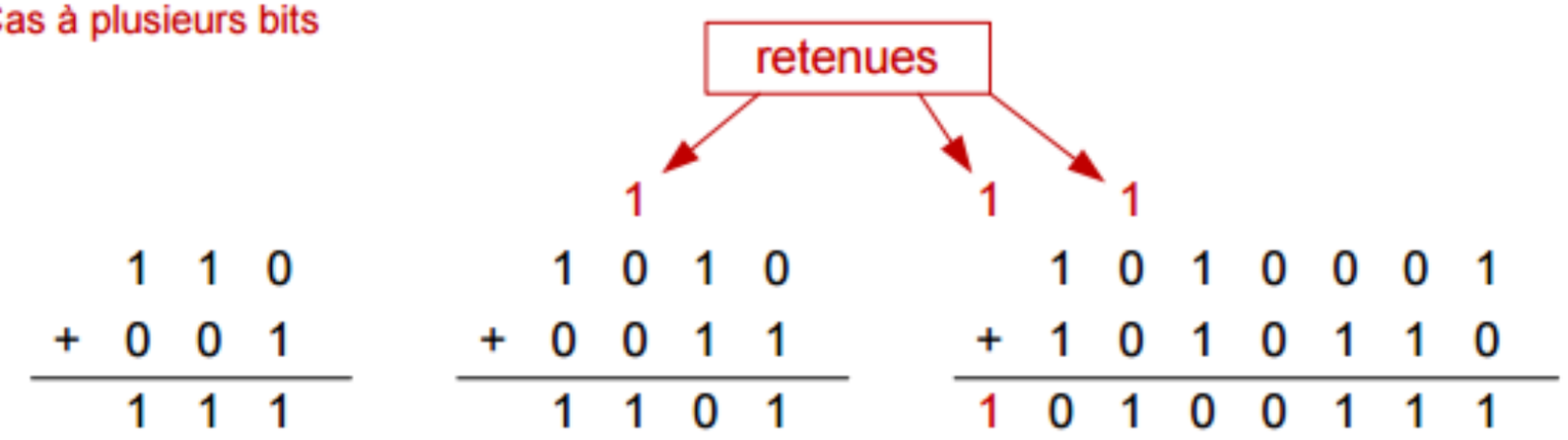
Bits	1	0	0	1	0	0	1	1

Addition en binaire

Cas simples



Cas à plusieurs bits



Représentation des entiers

Entiers non-signés

positifs (ou nuls)

0, 1, 2, …

entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Entiers signés

positifs ou négatifs

… -2, -1, 0, 1, 2, …

entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Nombres entiers signés

- Premier essai: représentation « signe et magnitude »
  - Le premier bit est le signe: 0 = positif, 1 = négatif
  - Le reste est la magnitude
  - Exemple: 1101_b = (-1) x (4 + 1) = -5
  - Combien de nombres peut-on représenter?
- Problèmes?
  - Représentation de 0?
    - $0 = 0000_b = 1000_b$
  - Opérations arithmétiques:
    - $-3 + 4 = 1011_b + 0100_b = 1111_b = -7$!

Représentation « complément 2 »

Entiers signés

- Le premier bit est -2^{N-1}, le reste est additionné

« N » est le nombre de bits

- Exemple: 1101_b = ?
  - $1101_b = -2^3 + 2^2 + 2^0 = -3$.
- Pour changer le signe d'un nombre, il faut:
  - le soustraire de 2^N (d'où le nom « complément 2 »)
  - plus direct (et plus facile): inverser tous les bits et ajouter 1.
- Exemple: $3 = 0011_b$. $-3 = ?_b$
  - Si on prend le complément + 1, on obtient: $1100_b + 1_b = 1101_b$.
- Combien de nombres peut-on représenter?

Représentation « complément 2 »

- Problèmes de tout à l'heure?
  - Représentation de 0?
    - 0000_b seulement (maintenant, $1000_b = -8_d$)
  - Opérations arithmétiques:
    - $-3 + 4 = 1101_b + 0100_b = 0001_b = 1$ (ouf!)
- Et la soustraction?
  - En pratique, on peut soustraire avec une addition avec l'inverse (en complément 2).
  - Par ex.: 2 - 3 = 2 + (-3) = -1.

À moins d'avis contraire,
nous utiliserons **toujours** le « complément 2 »
pour représenter les entiers signés.

Non-signé vs signé

- Non-signé
  - 0b11001011

Entiers non-signés

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	128	64	32	16	8	4	2	1
=	128	64	0	0	8	0	2	1

= 203

- Signé (complément 2)
  - 0b11001011

Entiers signés

Position	7	6	5	4	3	2	1	0
Bit	1	1	0	0	1	0	1	1
Valeur	-128	64	32	16	8	4	2	1
=	-128	64	0	0	8	0	2	1

= -53

Non-signé vs signé

Entiers non-signés
(positifs ou nuls)

Entiers signés
(positifs ou négatifs)

Seule différence:

Bit le plus significatif
(le plus à gauche)

2^{N-1}

-2^{N-1}

Question (piège)

Quelle est la valeur décimale de 0b1010?

PHIR™ #3

- A priori, **nous ne pouvons pas savoir** ce qu'une chaîne binaire signifie.
  - Ex: quelle est la valeur décimale de 0b1010?
  - La bonne réponse est: ça dépend!

positifs (ou nuls)

entier non-signé	10
entier signé	-6

positifs ou négatifs

- Il faut donc savoir **quel format utiliser** pour bien interpréter les données

Cas spécial 1: débordement (« overflow »)

- Quels nombres peut-on représenter avec N bits en complément 2?
  - -2^{N-1} à $2^{N-1}-1$
- Qu'arrive-t-il si on additionne
  - 5 + 4 = ?
  - on obtient -7!
- De façon similaire, -5 + -4 = 7
- Comment faire pour détecter un débordement?
  - le bit de signe change

Cas spécial 2: retenue (« carry »)

- 2 conditions:
  - S'il y a une retenue qui sort des bits les plus significatifs
  - Si un emprunt doit être fait sur le bit le plus significatif (lors d'une soustraction)
- Utile pour l'arithmétique *non-signée* (pas important pour l'arithmétique signée)